Lista 5, Analisis em Variedades 2016

1. a. Seja M uma variedade suave, prove que se M é simplesmente conexa então $H^1(M) = 0$.

   b. Dê um exemplo de uma variedade suave M tal que $H^1(M) = 0$ mas M não é simplesmente conexa.

2. Seja $\{X^t\}$ uma familia suave de campos vetoriais na variedade compacta M^n, no sentido que $X^t(p) = X(p,t)$ para uma função suave $X : M \times [0,1] \to TM$.

   a. Mostre que existe uma familia suave de difeomorfismos $\varphi_t : M \to M$ (não necesariamente uma familia à 1-parametro) com $\varphi_0 = Id_M$ e tal que
   $$X^t(\varphi_t(p)) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\varphi_{t+s}(p).$$

   b. Seja w_t uma familia de k-formas em M definimos a derivada $\frac{dw_t}{dt}$ como a k-forma
   $$\frac{d}{dt}w_t(p) = \lim_{s\to 0}\frac{w_{t+s}(p) - w_t(p)}{s}.$$
   Mostre que
   $$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* w_t) = \varphi_t^*(L_{X^t}w_t + \frac{d}{dt}w_t),$$
   onde L_{X^t} é a derivada de Lie respeito a X^t.

   c. Sejam w_0, w_1 duas formas de volume em M, defina
   $$w_t = (1-t)w_0 + tw_1.$$
   Mostre que φ_t verifica $\varphi_t^*(w_t) = w_0$ para todo t, se e somente se $L_{X^t}w_t = w_0 - w_1$.

   d. Use a formula $L_Y = i_Y d + di_Y$ (conhecida como "formula magica de Cartan") para mostrar que $\varphi_t^*(w_t) = w_0$ se e somente se
   $$d(i_{X^t}w_t) = w_0 - w_1.$$

e. Suponha que

$$\int_M w_0 = \int_M w_1,$$

justifique por que existe β tal que $w_0 - w_1 = d\beta$. Use os items anteriores para concluir que existe um difeomorfismo $f : M \to M$ tal que $w_0 = f^* w_1$.

3. Defina o *produto cup* $\smile: H^k(M) \times H^t(M) \to H^{k+t}(M)$ por

$$[w] \smile [\eta] = [w \wedge \eta].$$

Mostre que $\smile$ esta bem definido, que é bilinear e que $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$ para toda função suave f e $\alpha \in H^k(M)$, $\beta \in H^t(M)$.

4. a. Seja $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ a projeção, mostre que existe uma 1-forma $\theta \in \Omega^1(\mathbb{T})$ tal que $p^*\theta = dx$. Prove que θ é fechada mas não é exata.

   b. Considere $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$ e seja $\theta^i = \pi_i^*(\theta)$, onde $\pi_i : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ é a projeção no i-fator. Mostre que

   $$\theta^{i_1} \wedge ... \wedge \theta^{i_k}, 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n,$$

   representam elementos linearmente independientes em $H^k(\mathbb{T}^n)$ encontrando subvariendades de $\mathbb{T}^n$ sobre as quais eles tem integrais diferentes.

   c. Prove que toda função suave $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{T}^n$, com $n \ge 2$, tem grau zero (*Dica:* $H^n(\mathbb{T}^n)$ *é gerado por* $[\theta^1] \smile ... \smile [\theta^n]$.)

5. Calcule a cohomologia de De Rham das seguintes variedades:

   a. A esfera $\mathbb{S}^n$.

   b. A variedade M_r obtida tirando r pontos do plano $\mathbb{R}^2$.

   c. A fita de Moebius aberta.