Lista 3, Analisis em Variedades 2016

1. Seja $f : M \to N$ uma submersão. Prove que para todo campo X em N existe um campo Y em M f-relacionado com X, i.e. para todo $p \in M$ vale $df_p(Y(p)) = X(f(p))$.

2. Uma métrica Riemanniana g em M é uma correspondência que associa a cada ponto p um produto interno $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: para todo par de campos vetoriais suaves X, Y a função $p \to g_p(X, Y)$ é suave.

   a. Use partições da unidade para provar que em qualquer variedade é possivel definir uma métrica Riemanniana.

   b. Use o item a. para mostrar que TM e T^*M são isomorfos como fibrados vetoriais sobre M.

   c. Mostre que os items a. e b. podem ser estendidos para qualquer fibrado vetorial E, i.e. E possui uma métrica (correspondência que da um produto interno em cada E_p e que varia suavemente com p) e E, E^* são isomorfos como fibrados sobre M.

3. Seja V um espaço vetorial e η uma 2-forma em V. Suponha que η é não degenerada, i.e. para todo $x \in V$, $x \neq 0$, existe $y \in V$ tal que $\eta(x, y) \neq 0$.

   a. Prove que V tem dimensão par $2n$.

   b. Prove que existe uma base $\{x_1, y_1, ..., x_n, y_n\}$ de V tal que $\eta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ e $\eta(x_i, x_j) = \eta(y_i, y_j) = 0$ (*Dica: use indução, escolha* x_1, y_1 *e decomponha* $V = \langle x_1, y_1 \rangle \oplus W$).

   c. Prove que uma 2-forma μ em V é não degenerada se e só se $\mu^{\wedge n} = \mu \wedge ... \wedge \mu \neq 0$.

   d. Dada uma 2-forma diferencial ω em uma variedade M, diz-se que ω é uma forma simpletica se ω_p é não degenerada para todo $p \in M$ e $d\omega = 0$. Prove que toda variedade que admite uma forma simpletica tem dimensão par e é orientavel.

4. Seja ω uma k-forma diferencial e $X_1, ..., X_{k+1}$ campos vetoriais, prove a seguinte formula

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, ..., X_{k+1}) = &\sum_i (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{k+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, .., \hat{X}_i, .., \hat{X}_j, ..., X_{k+1}) \end{aligned}$$

O chapéu na formula significa que o campo deve ser apagado (*Dica: mostre primeiro que fixando ω o lado direito é $C^\infty(M)$-linear nos campos, então podemos supor que os campos são coordenados $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$*).