Lista 1, Analisis em Variedades 2016

1. Considere os numeros reais $\mathbb{R}$ como espaço topologico. Defina em $\mathbb{R}$ duas estructuras diferenciaveis diferentes.

2. Para $1 \leq k \leq n$ considere o espaço topologico

$$X = \{A = (v_1, ..., v_k) \in M_{n\times k} : v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n \ \ l.i.\}$$

e seja $\triangleright$ a relação de equivalencia $A_1 \triangleright A_2$ se e só se $A_2 = A_1 B$ para algum $B \in GL(k)$. Defina $G(k, n) = X/\triangleright$.

   a. Mostre que existe uma bijeção entre $G(k, n)$ e o conjunto de k-planos em $\mathbb{R}^n$ passando pela origem.

   b. Dê uma estrutura diferenciavel para $G(k, n)$.

3. Seja M uma variedade C^∞ e G um grupo que age em M por difeomorfismos, suponha que a ação de G é propriamente discontinua, i.e. para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, $\forall g \in G$, $g \neq e$.

   a. Mostre que M/G possui uma estrutura diferencivel tal que a projeção $M \to M/G$ é C^∞.

   b. Determine se as hipotesis dadas são suficientes para que M/G seja Hausdorff e tenha base enumerável, se não for assim dê hipotesis para garantir estas condiçoes.

4. Sejam $M_1, ..., M_k$ variedades C^∞ e $\pi_i : M_1 \times ... \times M_k \to M_i$ a projeção canônica. Mostre que

$$T_{(p_1,...,p_k)}(M_1 \times ... \times M_k) \to T_{p_1}M_1 \times ... \times T_{p_k}M_k$$

dado por $v \to (d\pi_1(v), ..., d\pi_k(v))$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

5. Seja $f : M^m \to N^n$ uma função suave que tem posto constante k numa vizinhança de $p \in M$. Mostre que existem cartas em p e em $f(p)$ tais que a expressão de f nessas coordenadas é dada por

$$(x_1, ..., x_m) \to (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Obtenha disto a forma normal das imersões e submersões.