Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2014

Lista 8

1. Verifique que o volume do n-simplex usual em $\mathbb{R}^n$ é igual a $1/n!$
2. Calcule as seguintes cohomologias:
   (a) $H^\bullet(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n)$.
   (b) $H^\bullet(T^n)$.
   (c) $H^\bullet(\mathbb{KP}^n)$, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
3. Prove que o isomorfismo $H^\bullet(M) \cong H^\bullet(M \backslash \partial M)$ não é válido para a cohomología de De Rham com suporte compacto.
4. Sejam $A, B \subsetneq \mathbb{R}^n$ compactos mergulhados em $\mathbb{R}^n$. Prove que se A e B tem o mesmo tipo de homotopia então $H_c^\bullet(\mathbb{R}^n - A) \simeq H_c^\bullet(\mathbb{R}^n - B)$.
5. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade homeomorfa a $\mathbb{S}^k$ (para $1 \leq k \leq n-2$).
   (a) Calcule a cohomología de suporte compacto de $\mathbb{R}^n \backslash A$.
   (b) No caso da cohomologia usual prove que
   $$H^q(\mathbb{R}^n \backslash A) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0, n-k-1, n-1, \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$
6. Prove que toda subvariedade compacta euclídea (mergulhada em $\mathbb{R}^n$) de codimensão um é orientável.

   O que acontece se A não é compacta, admite bordo, ou tem codimensão maior?
7. Prove que uma hiper-superfície mergulhada compacta e orientada em uma variedade ambiente orientada (compacta ou não), $N^n \subset M^{n+1}$, não separa a variedade ambiente necessariamente.
8. É possível calcular a cohomologia de $M^n \backslash \mathbb{D}^n$ em função da cohomología de M. Prove que $H^k(M^n) \cong H^k(M^n \backslash \mathbb{D}^n)$, $\forall k \leq n-2$. Nos casos $k = n-1, n$ devera distinguir segundo $H^n(M^n)$ seja trivial ou não.
9. Mostre que um co-complexo de $\mathbb{R}$-espaços vetoriais $(A_i, d_i)_i$ equivale a um único $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{Z}$-graduado $\mathcal{A} = \oplus_i A_i$ munido de um endomorfismo $d = \oplus d_i$ 2-nilpotente de grau $+1$.
10. Defina o produto de co-complexos $(\mathcal{A}, d^A)$ e $(\mathcal{B}, d^B)$ como $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, tal que em cada grau a derivação está determinada por:
    $$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_n = \oplus_i (A_i \otimes B_{n-i}) \xrightarrow{d^\otimes} \oplus_i (A_i \otimes B_{n+1-i}) = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{n+1}$$
    $$(a \times b) \mapsto d^A(a) \otimes b + (-1)^{deg(a)}.a \otimes d^B(b)$$
    quando a e b são elementos de grau puro.
11. (Teorema de Künneth)
    Sejam M e N variedades suaves tais que pelo menos uma é de tipo finito. Considere o mapa:
    $$\kappa : \Omega^k(M) \otimes \Omega^{n-k}(N) \to \Omega^n(M \times N)$$
    $$\kappa(\omega \otimes \eta) = \pi_M^* \omega \wedge \pi_N^* \eta =: \omega \wedge \eta.$$

Prove que κ induz um isomorfismo entre a cohomología de $M \times N$ e o produto tensorial das cohomologias de M e N:

$$\kappa : H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(N) \to H^\bullet(M \times N).$$

Repita esta construção para formas (e cohomología) de suporte compacto.

Dica: Faça indução num cobrimento por abertos associado à variedade de tipo finito.

12. Lembre que o bordo de uma variedade M admite um "colar" V, i.e., uma vizinhança aberta difeomorfa a um produto:

$$\partial M \times \{-\epsilon\} \subset \partial M \times [-\epsilon, \epsilon) \cong V \subset M.$$

Sejam M^n e N^n variedades com bordos difeomorfos via $f : \partial M \to \partial N$. Definimos a colagem ao longo de f como

$$M \cup_f N := M \backslash \partial M \cup_{f \times -Id} N \backslash \partial N$$

onde $(f \times -Id) : V_M \to V_N$ identifica $(x, t) \mapsto (f(x), -t)$.

(a) Verifique que $M \cup_f N$ é uma variedade suave.

(b) Observe que se o mapa de colagem for escolhido como $(f, Id)(x, t) = (f(x), t)$ então a colagem não seria Hausdorff.

(c) Supondo que M e N são de tipo finito prove que

$$\chi(M \cup_f N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(\partial M)$$

em particular independe da escolha de f.

(d) Considerando $M = N$ e colando ao longo do bordo das copias via $f = Id_{\partial M}$, obtém se o *dobro* de M, que denotamos por $\mathcal{D}(M)$. Para M compacta com bordo e de dimensão par verifique:

$$\chi(\mathcal{D}(M)) = 2.\chi(M)$$

13. No caso de duas variedades (com ou sem bordo) M_1 e M_2, podemos escolher pontos $p_i \in M_i$, $i = 1, 2$, e retirar respetivas bolas abertas mergulhadas $\mathbb{D}_i^n \subset M_i$ criando assim uma componente de bordo difeomorfa a $\mathbb{S}^{n-1}$. Escolhendo um difeomorfismo $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ obtemos a *soma conexa* $M \#_f N := (M_1 \backslash \epsilon \mathbb{D}_1^n) \cup_f (M_2 \backslash \epsilon \mathbb{D}_2^n)$. Compute a cohomologia de $M \# N$ em função das cohomologias de M e N.

14. Seja F um grupo atuando em M^n suave, de maneira propriamente descontinua. Prove que existe um isomorfismo entre k-formas diferencias em M^n/F e k-formas em M^n invariantes pela ação de F,

$$\Omega(M/F) \cong \Omega(M)^F$$

onde $g \in F$ atua em $\Omega(M)$ via a o pullback g^*.