Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2014

Lista 7

---

1. Dada $f : M^n \to N^k$ suave temos $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ que induz um morfismo de álgebras no nível da cohomología,
$$f^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M).$$
Verifique a boa definição, linearidade, compatibilidade com produto, e que preserva o grau.

2. Seja $0 \to C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^n \to 0$ um complexo (finito) de $\mathbb{R}$-espácios vetoriais de dimensão finita. Provar que $\sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} C^q = \sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} H^q(C^*)$. Deduzir que se o complexo é exato, então $\sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} C^q = 0$.

3. Calcule a cohomología de De Rham das seguintes variedades.
   (a) A esfera $\mathbb{S}^n$.
   (b) A variedade M_r obtida tirando r pontos do plano $\mathbb{R}^2$.
   (c) A fita de Moebius aberta.

4. Calcule a cohomología de De Rham com suporte compacto das variedades do exercício anterior.

5. É possível escrever $\mathbb{R}^2$ como união de dois abertos conexos U, V tais que sua intersecção seja desconexa?

6. Dizemos que um fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ separa dois pontos p e q de $\mathbb{R}^n$ se eles pertencem a componentes conexas distintas de $\mathbb{R}^n \backslash A$. Dados dois fechados disjuntos A e B e dois pontos distintos p, q de $\mathbb{R}^n \backslash (A \cup B)$, prove que se nem A nem B separam os pontos, então tampouco são separados por $A \cup B$.

7. Provar que se M^n é orientável, sem bordo, conexa e não compacta, então $H^n(M^n) = 0$.

8. Seja M uma variedade compacta, sem bordo, orientável de dimensão impar. Provar que a caraterística de Euler se anula, $\chi(M) = 0$.

9. Seja M uma variedade compacta, sem bordo, orientável de dimensão $n = 2m$ com m impar. Provar que $H^m(M)$ te, dimensão par. Deduzir que a característica de Euler $\chi(M)$ é par.

10. Dizemos que uma variedade é de tipo finito se admite uma cobertura por abertos $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_l$ finita tal que qualquer intersecção não vazia tem o mesmo H^k e H^k_c que $\mathbb{R}^n$.
    (a) Prove que se M é de tipo finito então tanto sua cohomología de De Rham usual $H^k(M)$, como a de suporte compacto $H^k_c(M)$, são de dimensão finita.
    (b) Prove que $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{N}$ não é de tipo finito.

11. Sejam $U, V \subset M$ abertos tais que U, V e $U \cap V$ são de tipo finito. Provar que $U \cup V$ é de tipo finito e vale
$$\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

12. Calcule o grau da função antípoda $a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $a(x) = -x$.

13. Provar que são equivalentes.
    (a) n é impar.
    (b) Existe um campo vetorial que nunca se anula em $\mathbb{S}^n$.
    (c) A função antípoda é homotópica a identidade.

14. Seja $W \subset \mathbb{C}$ uma região compacta com bordo suave e $p \in \mathbb{C}[X]$ um polinômio não constante sem raízes no bordo $\partial W \cong \mathbb{S}^1$. Prove que a quantidade de zeros de p em W contados com multiplicidade coincide com o grau da aplicação $p/|p| : \partial W \to \mathbb{S}^1$.

15. Seja $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ suave.

    (a) Prove que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(cos(t), sen(t)) = (cos(g(t)), sen(g(t)))$, e que necessariamente se verifica: $g(t + 2\pi) = g(t) + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

    (b) Prove que $\deg f = k$.

    (c) Dadas duas funções $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, prove que que f_1 e f_2 são homotópicas se e só se elas tem o mesmo grau.

16. Provar que uma função diferenciável $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ pode se estender continuamente ao disco $\mathbb{D}^2$ se e só se $\deg f = 0$. Mais ainda, prove que a extensão pode ser escolhida suave.

Seleção do Spivak

Fazer os exercícios do livro de M. Spivak, *"A Comprehensive Introduction to Differential Geometry"*, correspondentes aos capítulos 8 e 11, dando prioridade aos seguintes:

- Capítulo 8, exercícios: $2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 30, 31, 32$.
- Capitulo 11, exercícios: $1, 2, 3, 6, 12$.