Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2014

Lista 6

---

1. Prove que a integração de formas numa variedade diferenciável orientada M verifica as seguintes propriedades:
   (a) Se denotamos por $-M$ à variedade com a orientação oposta, então $\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$.
   (b) $\int_M a\,\omega_1 + b\,\omega_2 = a\int_M \omega_1 + b\int_M \omega_2$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.
   (c) Se ω é uma n-forma continua e não negativa então $\int_M \omega \geq 0$ e a igualdade se verifica só se $\omega = 0$.
   (d) Se $f : M \to N$ é um difeomorfismo entre variedades conexas orientadas e ω é uma forma integrável em N, então $\int_M f^*\omega = \pm \int_N \omega$, onde o sinal depende de f preservar o inverter a orientação.

2. Sejam α, β formas fechadas em M. Prove que $\alpha\wedge\beta$ é também fechada e que se adicionalmente uma é exata então $\alpha \wedge \beta$ é exata.

3. Seja M^n uma variedade suave com bordo.
   (a) Prove que ∂M tem estrutura de variedade sem bordo, por restrição do atlas de M.
   (b) Se M é orientável prove que ∂M herda uma orientação compatível, induzida por uma campo não nulo ao longo do bordo apontando para dentro de M.

4. Seja $A^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ subvariedade mergulhada tal que existe $X \in \mathfrak{X}_A(\mathbb{R}^{n+1})$ um campo vetorial ao longo de A, não nulo, e tal que $X_p \notin T_pA$, $\forall p \in A$. Prove que A herda uma forma de orientação (canônica a menos dum sinal) por contração da forma de orientação usual de $\mathbb{R}^{n+1}$ com a orto-normalização do campo anterior.

5. Seja $T^2 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ y_1^2 + y_2^2 = 1\}$ o toro com a forma de orientação induzida como produto de $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$.
   Considere a forma ambiente $\eta = x_1 y_1 dx_2 \wedge dy_2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ restrita a T^2 e calcule a integral
   $$\int_{T^2} i^*(\eta).$$

6. Dizemos que um subconjunto duma variedade n-dimensional suave orientável $Z \subset M^n$ tem medida nula, $|Z| = 0$, se quando intersecado com cada aberto coordenado (U, ϕ), a imagem $\phi(U \cap Z) \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nulo no com a métrica usual.

   Prove que a integral de uma forma com suporte compacto $w \in \Omega^n_c(M)$ é a mesma se tirarmos um conjunto Z fechado de medida nula,
   $$\int_M w = \int_{M\setminus Z} w.$$

7. Considere $\gamma \subset M$ uma curva C^1 parametrizada por $\Gamma : [a, b] \to M$, e $\omega \in \Omega^1(M)$ uma 1-forma diferenciável. Definimos a integral de línea de ω ao longo de C por $\int_C \omega := \int_a^b \Gamma^*(\omega)$.
   (a) Prove que a definição independe da parametrização escolhida (sempre que percorrida no mesmo sentido).
   (b) Se $\omega = df$ com $f \in C^\infty(M)$, e γ vá do ponto p ao ponto q prove que $\int_C \omega = f(q) - f(p)$. Conclua que $\int_C \omega$ independe da curva se a forma é exata.

8. Considere $\alpha \in \Omega^k(M^k)$, $\beta \in \Omega^n(N^n)$, top-formas com suporte compacto em respetivas variedades orientadas. Prove:

$$\int_{M\times N} \alpha \wedge \beta = \int_M \alpha \,.\, \int_N \beta$$

Comente orientações e os abusos notacionais envolvidos.

9. Seja M uma variedade.

   (a) Prove que duas formas $\theta, \tilde{\theta} \in \Omega^k(M)$ coincidem $\theta = \tilde{\theta}$, se e só se verificamos

   $$\int_\sigma \theta = \int_\sigma \tilde{\theta}$$

   para cada $\sigma : S \to M$ subvariedade compacta, orientada e de dimensão k.

   (b) Seja $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$. Provar que existe uma única $\theta \in \Omega^k(M)$ tal que para toda $N \subseteq M$ subvariedade orientável compacta, com borde e de dimensão k vale

   $$\int_S \theta = \int_{\partial S} \omega.$$

10. Seja M^n compacta e conexa, sem bordo, e seja $\omega \in \Omega^n(M)$ uma top-forma que não se anula. Provar que ω não é exata.

11. (a) Seja $\alpha = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Prove que α é fechada mas não exata.

    (b) Analogamente, seja $\omega(x) = \sum_{0\leq i<n}(-1)^i x_i\, dx_0 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \in \Omega(\mathbb{R}^n)$. Prove que $\alpha \in \Omega(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, dada por $\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^n}\omega(x)$, é fechada mas não exata.

    (c) Compute a integral de ω sobre o elipsoide $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i |x_i/a_i|^2 = 1\}$ em função de $\int_{S^{n-1}} \omega$.

12. Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $\omega \in \Omega^k(M)$ uma forma fechada.

    (a) Se S^k é uma subvariedade sem bordo, orientada, de dimensão k tal que $S = \partial W$ para alguma subvariedade compacta $W \subset M$, então $\int_S \omega = 0$.

    (b) Se W é subvariedade compacta orientada de dimensão $k+1$ com bordo $\partial W = S \sqcup T$ onde S e T são subvariedades de dimensão k com a orientação induzida, então $\int_S \omega = -\int_T \omega$.

    (c) Se $\omega \in \Omega^n(M^n)$ é uma forma de orientação, e M^n compacta, ela é fechada mas não exata.

13. Demostre que toda 1-forma de $\mathbb{S}^2$ fechada é exata.

14. Prove que o toro T^2 não é difeomorfo à esfera $\mathbb{S}^2$.
    Dica: Construir uma 1-forma em T^2 fechada que não seja exata.

Extras

15. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial diferenciável.

   (a) Demostrar que $\omega_F^1(x)(v) := \langle F(x), v\rangle$ define uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$. Ache as coordenadas de ω_F^1 na base $\{dx, dy, dz\}$. Reciprocamente, se ω é uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$, prove que ω determina um único campo G em $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^1 = \omega$.

   (b) Demostrar que $\omega_F^2(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v\rangle$ define una 2-forma em $\mathbb{R}^3$. Compute as coordenadas na base $\{dx\wedge dy, dz\wedge dx, dy\wedge dz\}$. Reciprocamente, prove que toda 2-forma ω define um único campo G em $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^2 = \omega$.

   (c) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função suave. Ache a relação entre

      i. df y ∇f,
      ii. $\nabla \times F$ y $d\omega_F^1$,
      iii. $\nabla \cdot F$ y $d\omega_F^2$ (identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \simeq C^\infty(\mathbb{R}^3)$ usando a base $dx \wedge dy \wedge dz$).

   Concluir a partir de $d \circ d = 0$, as formulas clássicas: $\nabla \times \nabla \equiv 0$ e $\nabla \cdot \nabla \equiv 0$.

16. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com produto interno, orientado, de dimensão n.

   (a) Verifique que para cada k podemos definir um produto interno em $\Lambda^k(V)$ dado por

$$\langle \wedge_i v_i, \wedge_j w_j\rangle = \det\left(\langle v_i, w_j\rangle_{i,j}\right).$$

   (b) Seja $(v_i)_{0\leq i<k} \in V^k$ uma k-upla de vetores tangentes. Então existe um único $z \in \wedge^{n-k}V$ (o *produto vectorial* dos v_i) tal que para cada $(w_i)_{k\leq i<n} \in V^{n-k}$ se verifica

$$\langle z, w_k \wedge \cdots \wedge w_{n-1}\rangle = \omega(v_0, \ldots, v_{k-1}, w_k, \ldots, w_{n-1}),$$

   aonde ω é a forma de volume orientado do espaço V.
   Prove que o produto vetorial define uma função linear $\wedge^k V \to \wedge^{n-k}V$, ou seja, um elemento $P \in \wedge^k V^* \otimes \wedge^{n-k}V$.

   (c) No caso $k = n-1$, escrever a P em termos duma base ortonormal $(e_i)_{0\leq i<n}$ e sua base dual $(e^j)_{0\leq j<n}$,

   (d) Demostre que se $V = T_pM$ é o espaço tangente a uma variedade riemanniana orientada, e S^k é uma subvariedade orientada de dimensão k com forma de volume ω, então para cada k-upla de vectores $(v_i)_i \in (T_pS)^k$ temos:

$$|\omega(\ldots, v_i, \ldots)| = \|\cdots \wedge v_i \wedge \ldots\|.$$

   Se $k = n-1$, prove que o vetor normal orientado em p está dado por

$$N_p = P(v_1, \ldots, v_{n-1}),$$

   onde $v_1, \ldots, v_{n-1}$ é uma base ortonormal orientada de T_pS.

17. Prove os teoremas clássicos da análise integral.

   (a) Teorema de Green:
   Sejam F_1, F_2 funções suaves definidas num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ com bordo dado por uma curva fechada suave (por partes) $\partial D = C$. Verifique:

$$\int_C F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D (\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y)\,dx.dy$$

   Comprove que com as notações indicadas a orientação da curva C deve ser tomada em sentido anti-horário.

(b) Teorema de Stokes:
Seja F um campo vetorial suave em $\mathbb{R}^3$, e D um domínio como no ponto anterior, dentro de uma superfície do espaço euclídeo, $D \subset \Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$. Verifique:

$$\iint_{D^2} \nabla \times F = \iint_{\partial D^2} F$$

Qual é a relação entre a orientação de D^2 e a do seu bordo?

(c) Teorema de Gauss (da divergência):
Seja F um campo vetorial suave em $\mathbb{R}^3$, e $Q \subset \mathbb{R}^3$ um domínio compacto com bordo suave (por partes) com normal exterior $\eta : \partial \to \mathbb{R}^3$. Temos a seguinte igualdade:

$$\iiint_{Q} \nabla \cdot F = \iint_{\partial Q} F \cdot \eta$$

Sugestão de leitura: Recomendo a introdução ao texto "From Calculus to Cohomology" de I. Madsen e J. Tornehave.

18. (*Arquimedes, circa -250*) Seja $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_0 < 0\}$ o mar. Seja $S \subseteq M$ um corpo mergulhado (subvariedade compacta de dimensão 3, com bordo). Em cada ponto $x \in \partial S$, a água faz uma força $F(x) = kx_0 \cdot \nu(x)$, onde kx_0 é a pressão da água (proporcional a profundidade x_0, com $k > 0$ constante), e ν o vetor tangente a M unitário apontando para fora de S.

    A força total se computa como $F_{\partial S} = \int_{\partial S} \omega$, onde $\omega(x) = kx_0 P$ é uma 2 forma em M com valores em $\mathbb{R}^3$ (ou seja, uma 3-upla de elementos de $\Omega^2(M)$), dada pelo produto vetorial de $\mathbb{R}^3$, $P : \wedge^2\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Prove que

$$F_{\partial S} = k\,|S|\,e_0.$$