Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2014

Lista 4

1. Dadas $f, g \in C^\infty(M)$, e campos tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ prove:
$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X\ .$$

2. Considere coordenadas polares em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ dadas por $(x,y) = (r \cdot cos(\theta), r \cdot sen(\theta))$, e compute ∂_r, ∂_θ em função de ∂_x, ∂_y, e vice-versa.

   Construa o sistema de coordenadas esférico para $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ e compute $\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z$ em função dos campos vetoriais coordenados $\partial_\theta,\ \partial_\phi,\ \partial_r$.

3. Sejam $k \leq n$ campos tangentes $X_1 \cdots X_k \in \mathfrak{X}(M^n)$, linearmente independentes em $p \in M$.

   Prove que eles são linearmente independentes numa vizinhança de p, e que existe uma carta adaptada (u, ϕ) tal que:
$$(\partial_{\phi_1}, \cdots, \partial_{\phi_k})_{|_{(p)}} = (X_1 \cdots X_k)_{|_{(p)}}$$

4. (a) Dada (U, ϕ) carta local, verificar:
$$[\partial_{\phi_i}, \partial_{\phi_j}] = 0$$

   (b) Prove que não existe carta de $\mathbb{R}^2$ aonde localmente se verifique
$$\begin{aligned}&\partial_{\phi_i} = X_i, \quad i = 1, 2\\ &X_1 = (1,0),\ X_2 = (0, y(x^2+1)) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)\end{aligned}$$

5. Provar que os campos vetoriais sobre uma variedade tem estrutura de álgebra de Lie, ou seja: o colchete é $\mathbb{R}$-bilinear, antissimétrico ($[X,Y] = -[Y,X]$) e satisfaz a identidade de Jacobi:
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

6. É verdade que o colchete de Lie é $C^\infty(M)$-bilinear?

7. Prove o seguinte isomorfismo de fibrados vetoriais:
$$T\mathbb{S}^2 \oplus \epsilon^1 \cong \epsilon^3$$
   onde ϵ^k indica o fibrado trivial de posto k (no caso: $S^2 \times \mathbb{R}^3$).

8. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ suave e não singular. Prove que existe um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que:
$$X(f) = 1.$$

9. Dado $k \leq n$ prove que a variedade $\{A \in \mathbb{R}^{k \times n} \mid posto(A) = k\}$ tem estrutura de GL(k)-fibrado principal sobre a $Gr(k,n)$, dado pela projeção que define a Grassmanniana:
$$\{A \in \mathbb{R}^{k\times n} \mid posto(A) = k\} \longrightarrow Gr(k,n)$$
$$A \mapsto Im(A) = [\mathbb{R}^k \cdot A].$$

10. Dadas M_1, M_2 variedades suaves, prove:

    (a) $TM_1 \times TM_2 \cong T(M_1 \times M_2)$ difeomorfas como variedades.

    (b) $\pi_{M_1}^*(TM_1) \oplus \pi_{M_2}^*(TM_2) \cong T(M_1 \times M_2)$ isomorfos como fibrados (aonde π_{M_i} são as respetivas projeções do produto no fator M_i, e $\pi_{M_i}^*$ indica o pullback do fibrado correspondente.

11. (a) Dada uma subvariedade euclídea $M^k \xrightarrow{j} \mathbb{R}^n$, verifique que o seu espaço tangente pode se ver como sub-fibrado do fibrado trivial induzido pelo ambiente:

$$TM \subseteq j^*(T\mathbb{R}^n) \cong M \times \mathbb{R}^n$$

    (b) A estrutura de produto interno usual no ambiente permite definir o complemento ortogonal $T_p^\perp M := (T_pM)^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$. Prove que a coleção destes planos: $\bigsqcup_{p\in M} T_p^\perp M =: T^\perp M$ é um fibrado vetorial localmente trivial sobre M, de posto $n-k$.

    (c) Para $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ prove que seu fibrado normal é trivial:

$$T^\perp M \cong \epsilon^1.$$

12. Considere a fita de Moebius definida como o quociente duma faixa pela relação usual:

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}/\{(0,y) \sim (1,-y)\}.$$

    Prove:

    (a) M é difeomorfa a um fibrado vetorial sobre seu equador $\mathbb{S}^1$.

    Visualização: ir para o segundo andar e esticar infinitamente a fita em bronze. Quem preferir pode olhar $M \subseteq \mathbb{R}^4$ para evitar auto-interseções.

    (b) $M \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1 =: E$ não é um fibrado trivial.

    (c) Mas $E \oplus E \cong \epsilon^2$ é trivial.

13. Seja $M = S^3$ e $X_i, i = 1,2,3$ campos vetoriais na esfera conseguidos por restrição dos seguintes campos de $\mathbb{R}^4$:

$$X_1 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$X_2 = -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$X_3 = -x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4}$$

    (a) Verifique que são campos vetoriais na esfera (ou seja, que são tangentes a esfera em cada ponto, e que são funções $X_i : S^3 \to TS^3$ suaves).

    (b) Verifique que em todo ponto da esfera dão uma base ortonormal do tangente (no produto interno usual do ambiente $\mathbb{R}^4$) e deduza que TS^3 é trivial.

    (c) Calcule $[X_i, X_j]$ para todo $i, j = 1,2,3$, em termos dos mesmos X_i's.