Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2014

Lista 1

1. Prove que os seguintes conjuntos tem estrutura de variedade diferencial, construindo um atlas suave:

   (a) Os números reais estendidos $\mathbb{R}_e := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

   (b) Matrizes invertíveis $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

   (c) Esferas $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

   (d) O plano projetivo $\mathbb{RP}^2$.

   (e) A fita de Moebius aberta (ir no segundo andar). Esta pode ser definida como o quociente duma faixa pela relação usual,

   $$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}/\{(0, y) \sim (1, -y)\}$$

2. Prove que os seguintes conjuntos não admitem estrutura de variedade diferencial compatível com a topologia usual:

   (a) O intervalo semi-aberto $[0, 1) \subset \mathbb{R}$;

   (b) Uma cruz $+ \subset \mathbb{R}^2$.

   (c) A "linha longa" (ver o livro de Munkres, "Topologia).

3. Verifique:

   (a) Toda variedade conexa é arco-conexa.

   (b) Toda variedade é localmente compacta.

   (c) O recobridor universal duma variedade admite estrutura diferencial compatível que faz da projeção uma aplicação suave.

   (d) Toda variedade é t_4 (fechados disjuntos podem ser separados por abertos disjuntos).

4. Verifique a compatibilidade do atlas cartesiano com as coordenadas polares em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dadas por

   $$x = r \cdot cos(\theta)$$
   $$y = r \cdot sen(\theta).$$

   Qual é a matriz diferencial da mudança de coordenadas (nos dois sentidos)?

5. Prove que o seguinte mapa é suave. Determine para quais valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ define uma subvariedade. O que pode se dizer da imagem segundo o caso?

   $$f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong T^2$$

   $$t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$$

6. Seja $f : M \to N$ uma função injetiva entre variedades.

   (a) Se f é suave prove que $dim(M) \leq dim(N)$, ocorrendo a igualdade se e só se f é um homeomorfismo local. Observe que f não precisa ser um difeomorfismo.

   (b) Se f é apenas continua mas $dim(N) = 1$ prove que $dim(M) \leq 1$.

7. Dada $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ suave, com M^n compacta, prove que existe uma singularidade (um ponto não regular).