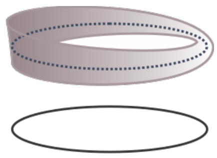

Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2017

Lista 1

1. Prove que os seguintes conjuntos tem estrutura de variedade diferencial, construindo um atlas suave:
   (a) Os números reais estendidos $\mathbb{R}_e := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
   (b) Matrizes invertíveis de $GL_n(\mathbb{R})$.
   (c) Esferas $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
   (d) O plano projetivo $\mathbb{R}P^2$.
   (e) A faixa de Moebius aberta. Esta pode ser definida como o quociente duma faixa pela relação usual,
   $$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1\}/\{(0,y) \sim (1,-y)\}$$
   (f) O conjunto dos subespaços vetoriais de dimensão k de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{G}_{n,k}$.

2. Seja M^n, N^n variedades diferenciáveis (conexas) de mesma dimensão n. Suponha M compacta e N não compacta. Dada $f : M^n \to N^n$ suave, prove que f é singular.

3. Seja M^m, N^n, P^k variedades diferenciáveis. Moste que
   (a) $M \times N$ tem estrutura de variedade diferenciável.
   (b) Considere as projeções canônicas $\pi_1 : M \times N \to M$ e $\pi_2 : M \times N \to N$. Prove que $f : P \to M \times N$ é suave se e só se $\pi_1 \circ f$ e $\pi_2 \circ f$ o são.
   (c) Prove que o mapa $v \mapsto (d_p\pi_1(v), d_q\pi_2(v))$ é um isomorfismo de $T_{(p,q)}(M \times N)$ com $T_pM \times T_qN$.

4. Seja $f : M \to N$ uma função injetiva entre variedades. (a) Se f é suave prove que $\dim(M) \leq \dim(N)$, ocorrendo a igualdade se e só se f é um homeomorfismo local. Observe que f não precisa ser um difeomorfismo. (b) Se f é apenas continua, mas $\dim(N) = 1$, prove que $\dim(M) \leq 1$.

5. Represente por $\mathbb{G}_{n,k}$ a variedade de Grassmann dos subespaçoes vetoriais de dimensão k. Prove que uma aplicação $W : [a,b] \to \mathbb{G}_{n,k}$ é suave se e somente se existem $Y_1, \ldots, Y_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ suaves tais que$\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ é uma base de $W(t)$ para cada t.

6. Mostre que $\mathbb{G}_{n,k}$ e $\mathbb{G}_{n,n-k}$ são difeomorfas.